УДК 511.52

ГЕРОНОВЫ И ТИАНОВЫ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Чёрная Н. Е.,
научный руководитель канд. физ.мат. наук Т. Ю. Войтенко
Лесосибирский педагогический институт – филиал
Сибирского федерального университета

Треугольник, у которого площадь S и стороны x, y, z выражаются натуральными числами, называют *героновым* треугольником. Геронов треугольник $\langle x, y, z; S\rangle$ называется *основным*, если его стороны x, y, z взаимно просты, то есть $(x, y, z) = 1$.

Вызывает интерес задача о нахождении всех героновых треугольников. Домножая длины сторон такого треугольника на соответствующий общий множитель, можно получить подобный треугольник с целочисленными сторонами и площадью, поэтому по формуле Герона эта задача сводится к решению в целых числах a, b, c, S уравнения:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

где $p = (a+b+c)/2$. Брахмагупта (индийский математик и астроном, 598-660 гг.) нашел его решение в параметрическом виде: длины сторон целочисленного геронова треугольника равны

$$k(m^2+n^2),\ n(m^2+k^2),\ (n+k)(m^2-nk),$$

где k, m, n − произвольные натуральные числа, причем $m^2 > nk$; при этом площадь треугольника равна $kmn(m+n)(m^2-nk)$. Несколько примеров таких треугольников:

(3, 4, 5), (5, 5, 6), (5, 5, 8), (6, 8, 10), (10, 10, 12),
(5, 12, 13), (10, 13, 13), (9, 12, 15), (4, 13, 15), … .

Заметим, что все эти примеры, кроме последнего – пифагоровы треугольники, то есть прямоугольные треугольники с целочисленными сторонами или равнобедренные треугольники, состоящие из двух равных пифагоровых. Треугольник из последнего примера состоит из двух неравных пифагоровых треугольников со сторонами (12/5; 16/5, 4) и (16/5, 63/5, 13) с общим катетом длины 16/5. Нетрудно показать, что любой геронов треугольник либо прямоугольный (пифагоров), либо составлен из двух пифагоровых.

Вопросу отыскания героновых треугольников посвящены работы Брадиса, Сычикова, Серпинского, Поповича, Осипяна и др. В последние десятилетия этой темой активно занимается Кожегельдинов. В [1] приведен ряд эквивалентных общих формул, каждая из которых описывает все основные героновы треугольники. Приведем одну из них:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{(a+b)(ac^2-bd^2)}{\big(ac^2-bd^2, bd^2(a+b)\big)}, \quad & y &= \frac{ab(c^2+d^{2)}}{\big(ac^2-bd^2, bd^2(a+b)\big)}, \\ z &= \frac{a^2c^2+b^2d^2}{\big(ac^2-bd^2, bd^2(a+b)\big)}, \quad & S &= \frac{abcd(a+b)(ac^2-bd^2)}{\big(ac^2-bd^2, bd^2(a+b)\big)^2}, \end{aligned}\right\}$$

где

$$a, b, c, d \in \mathbb{N}, \qquad ac^2 > bd^2, \qquad (a,b) = (c,d) = 1.$$

Героновы треугольники $\langle x, y, z; S\rangle$, площадь которого выражается квадратом натурального числа A, назовем *тиановым* треугольником. Тианов треугольник $\langle x, y, z;\ A^2\rangle$, стороны которого x, y, z выражаются взаимно простыми числами, назовем *основным*. Хотя известно значительное число основных тиановых треугольников, не существует общей формулы, описывающей все эти треугольники, то есть вопрос о параметризации всех основных тиановых треугольников остается открытым (см. [2], Problem 6628).

Вопрос о нахождении общей формулы всех основных тиановых треугольников сводится к решению в натуральных числах диофантова уравнения четвертой степени с четырьмя неизвестными α, β, γ, A:

$$\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) = A^4,$$

где

$$\alpha, \beta, \gamma, A \in \mathbb{N}, \ (\alpha, \beta, \gamma) = 1.$$

Отметим, что если x, y, z стороны и S площадь основного тианова треугольника, то $x = \alpha+\beta$, $y = \beta+\gamma$, $z = \gamma+\alpha$, $S = A^2$, где $\alpha, \beta, \gamma, A \in \mathbb{N}, (\alpha, \beta, \gamma) = 1$.

Общее решение этого уравнения в натуральных числах неизвестно. Но в работах [3], [4] показано, что это уравнение имеет бесконечное множество основных решений в натуральных числах α, β, γ, A.

Мы покажем, что если выбрать натуральное число m такое, что $\frac{1}{2}(m^2-1)$ есть квадрат, то треугольники со сторонами $(\frac{1}{2}(m^3+m^2)-1, \ \frac{1}{2}(m^3-m^2)+1, \ m^2)$ и $\left(m^3-\frac{1}{2}(m-1), \ m^3-\frac{1}{2}(m+1), \ m\right)$ имеют площади, являющиеся квадратом натурального числа.

Пусть $a = \frac{1}{2}(m^3+m^2)-1, \ b = \frac{1}{2}(m^3-m^2)+1, \ c = m^2$ стороны треугольника. Тогда периметр $2s = m^3+m^2$, и поэтому $s-a = 1$, $s-b = m^2-1$, $s-c = \frac{1}{2}(m^3-m^2)$. Воспользовавшись формулой Герона $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ для площади треугольника со сторонами (a, b, c) и периметром $2s$ получаем, что площадь треугольника Δ равна $\frac{1}{2}m^2(m^2-1)$.

Аналогично проверяется второй случай.

Предположим, что $\frac{1}{2}(m^2-1) = n^2$. Тогда $m^2-2n^2 = 1$. Решениями этого уравнения являются, например, пары $(m, n) = (3,2)$, $(17,12)$, которые приводят к тиановым треугольникам

$$(a, b, c; s, \Delta) = (17,10,9; 18,36), \qquad (26,25,3; 27,36),$$
$$(2600,2313,289; 2601,41616), \ (4905,4904,17; 4913,41616).$$

Уравнение $m^2-2n^2 = 1$ – это уравнение Пелля. Решения этого диофантового уравнения хорошо известны.

Отметим также, что один из способов нахождения тиановых треугольников связан с решениями другого диофантового уравнения, а именно уравнения $x_1^4+x_2^4+x_3^4 = x_4^4$ $(x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathrm{N})$, которое в свою очередь является частным случаем уравнением Эйлера $x_1^n+x_2^n+\cdots+x_{n-1}^n = x_n^n$. Наименьшее известное значение x_4, для которого выполняется равенство $x_1^4+x_2^4+x_3^4 = x_4^4$ равно 422481. Наименьшая сторона соответствующего тианова треугольника тогда равна $23228924398159 04960321$.

Список литературы

1. Кожегельдинов С.Ш. Отыскание основных героновых треугольников // Изв. АН Респ. Казахстан. Сер. физ.-мат. − 1992. − №3. − С. 48-51.

2. Melter R. A. Problem 6628 // Amer. Math. Monthly. 1990. V. 97. №4. P/ 350; 1991. V. 98. №8. P. 772-774.

3. Кожегельдинов С.Ш. К вопросу о тиановых треугольниках // Матем. заметки. 1993. Т. 53. №5. С. 155-157.
4. Кожегельдинов С.Ш. Об основных тиановых треугольниках // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №4. С. 561-569.
5. Barbeau, E.J. Pell`s equation. – New York.: Springer, 2003.